



**JUAN RIUS-CAMPS**

**ACELERACIÓN NORMAL  
SUPLEMENTARIA**

26 de FEBRERO de 2009

**EDICIONES ORDIS**



# **EDICIONES ORDIS**

Gran Vía de Carlos III, 59. 2º, 4ª

08028 BARCELONA

26 de Febrero de 2009



## ACELERACIÓN NORMAL SUPLEMENTARIA

### SENTIDO CINEMÁTICO DE LA VELOCIDAD ANGULAR $\dot{\varphi}^*$

1. Partimos de la trayectoria real de un punto material  $m$ , y para su estudio local utilizamos un referencial de inercia  $s, b, n$ , *intrínseco*. cuyos sentidos positivos vienen dados por el de la velocidad para  $s$ ; hacia la convexidad para  $n$ ; y por  $b = s \wedge n$ . Necesitamos considerar también la *evoluta* de la misma referida a los mismos ejes (ver Fig. 1, en el caso  $dv/dt > 0$ , y Fig. 2, en el caso  $dv/dt < 0$ ).

Para explicar el sentido cinemático de la velocidad angular  $\dot{\varphi}^* = dv/d\varphi$ , vamos a estudiar un elemento de trayectoria  $ds$  que se corresponde con el  $d\varphi$  de la *evoluta*; ambos están situados en el plano osculador (ver Fig. 1 cuando  $dv/dt > 0$  y Fig. 2 cuando  $dv/dt < 0$ ). Así pues, podemos considerar la trayectoria localmente plana y referida a una base inercial intrínseca de versores  $s, n, b$ , formada por la *tangente*, la *normal* y la *binormal*. El arco  $ds$  de trayectoria, está determinado por los puntos  $A, B$ , y el  $d\varphi$  de la *evoluta*, por sus homólogos  $A, B$ .

La velocidad de la partícula en  $A$ , es  $v$ , y en  $B$ ,  $v+dv$ . Los radios de curvatura en estos puntos son:  $\varphi+d\varphi$  y  $\varphi$ . El ángulo girado por el radio de curvatura al pasar de  $A$  a  $B$  es:

$$d\varphi = ds/\varphi$$

y la correspondiente velocidad angular será:

$$\dot{\varphi} = d\varphi/dt \quad (\text{con } \dot{\varphi} = \dot{\varphi} b)$$

También se puede escribir:  $\dot{\varphi} = v/\varphi$ , que no depende, obviamente, de  $dv$  ni de  $d\varphi$ . Al calcular la aceleración centrípeta llegamos a su expresión:

$$\mathbf{a}_{\square} = (-v^2/\square)\mathbf{n} \quad (1)$$

en la que no se consideran los incrementos  $dv$ ,  $d\square$ , pues no le afectan. Es el resultado de sustituir el  $ds$  de trayectoria por el correspondiente en círculo osculador en el punto. Sin embargo si observamos con detalle la *trayectoria real*, ésta viene caracterizada por tener una *evoluta* bien determinada (ver Fig. 1 y Fig. 2). Al prescindir de  $dv$ , en el estudio de la aceleración centrípeta, significa que partiendo del punto  $A$  llegamos al  $B'$ , pero no al punto real  $B$ ; y lo mismo cabe decir de sus homólogos centros de curvatura: el  $A$  está situado en la *evoluta*, por ser el punto de partida, pero el  $B'$  está situado fuera de la *evoluta* real (ver Fig. 1 y Fig. 2), cuyo punto es el  $B$ . Es evidente que la aceleración centrípeta está correctamente determinada, pero también resulta claro que el arco de *evoluta*  $d\square$  debe coincidir con el determinado por los puntos  $A$ ,  $B$  de las figuras, y no por los  $A$ ,  $B'$ , como sucede al prescindir de  $dv$  y de  $d\square$ . Para corregir esta deficiencia será necesario girar  $AB'$  un ángulo:

$$d\square^* = BB'/d\square$$

para que coincida con  $d\square$  de la *evoluta real*, con una velocidad angular *finita* cuyo módulo viene dado por:

$$(BB'/d\square)/dt = (d^2s/d\square^2)/dt = dv/d\square = d\square^*/dt = \square^*$$

Esta velocidad angular indica que la simplificación de sustituir, en cada punto, la trayectoria por el círculo osculador, lleva implícita la necesidad de girar el *arco de evoluta*, con velocidad angular  $\square^*$ , para que coincida con el *arco real*. Pero este *arco*  $AB'$  de *evoluta* debe ser *normal* al homólogo  $AB''$  de la *trayectoria*, girado también  $d\square^*$  respecto al inicial  $AB$  (ver Fig. 1 y Fig. 2). Será preciso girar este arco  $AB'$  de *evoluta* un ángulo  $d\square^*$ , en el *mismo sentido* cuando  $dv/dt > 0$  y en sentido *opuesto* cuando  $dv/dt < 0$ , para que coincida con el *real*  $AB$ , y lo mismo en la *trayectoria*. Consecuencia de esto es que el radio de curvatura  $\square$  se incrementa en el diferencial de segundo orden:

$$B'B'' = dsd\square^* \quad (\text{con } dv/dt > 0)$$

$$B'B'' = -dsd\varphi^* \quad (\text{con } dv/dt < 0)$$

del que resulta una *aceleración normal adicional*:

$$a_{\varphi}^* = B'B''/dt^2 = dsd\varphi^*/dt^2 = v\varphi^* \quad (\text{con } dv/dt > 0)$$

$$a_{\varphi}^* = B'B''/dt^2 = -dsd\varphi^*/dt^2 = -v\varphi^* \quad (\text{con } dv/dt < 0)$$

superpuesta a la *aceleración centrípeta*  $a_{\varphi} = -v^2/\varphi = -v\varphi$  (1). Así pues, la *aceleración normal total* será:

$$a_{\varphi} + a_{\varphi}^* = -v(\varphi - \varphi^*) \quad (\text{con } dv/dt > 0)$$

$$a_{\varphi} + a_{\varphi}^* = -v(\varphi + \varphi^*) \quad (\text{con } dv/dt < 0)$$

)  
respectivamente.

La *aceleración tangencial*  $a_s = dv/dt$  evidentemente no cambia. En expresión vectorial podemos escribir:

$$a_s \mathbf{s} + a_{\varphi} \mathbf{n} + a_{\varphi}^* \mathbf{n} = \mathbf{a} + v\varphi^* \mathbf{n} = \mathbf{a} - v\varphi \varphi^* \quad (\text{con } dv/dt > 0)$$

$$a_s \mathbf{s} + a_{\varphi} \mathbf{n} + a_{\varphi}^* \mathbf{n} = \mathbf{a} - v\varphi^* \mathbf{n} = \mathbf{a} + v\varphi \varphi^* \quad (\text{con } dv/dt < 0)$$

(2)

**2.** Ahora, desde el punto de vista dinámico, si deseamos calcular correctamente la *fuerza centrípeta total*, debemos considerar la *aceleración normal total* (2). La expresión de esta fuerza será:

$$\mathbf{f}_n = -mv(\varphi - \varphi^*) \mathbf{n} = mv\varphi(\varphi - \varphi^*) \quad (\text{con } dv/dt > 0)$$

$$\mathbf{f}_n = -mv(\varphi + \varphi^*) \mathbf{n} = mv\varphi(\varphi + \varphi^*) \quad (\text{con } dv/dt < 0)$$

(3)

De la (2) y (3) se sigue que la *fuerza total* en la ND es:

$$\mathbf{f} = m_o(\mathbf{a} - \mathbf{v} \square \square^*) \quad (\text{con } dv/dt > 0)$$

$$\mathbf{f} = m_o(\mathbf{a} + \mathbf{v} \square \square^*) \quad (\text{con } dv/dt < 0)$$

que es isomórfica con la “Fuerza de LORENTZ” del electromagnetismo:

$$\mathbf{f}_o = m_o(\mathbf{E}_o + \mathbf{v} \square \mathbf{B}_o)$$

Sorprendente resultado; más todavía si tenemos en cuenta que la expresión de la “Fuerza de LORENTZ” es exclusivamente experimental. Además, en el triedro de FRENET el módulo  $v$  de la velocidad es siempre *positivo* en el *sentido* en que se mueve la partícula. Sabemos que mientras el móvil describe la trayectoria el centro de curvatura describe la *evoluta*; en esta última el signo de  $d\square$  es también *siempre positivo*. Al invertir el sentido de recorrido *cambia el sentido los versores  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{b}$*  en el triedro de referencia; así  $\mathbf{v} = vs$  pero  $dv$  se cambia en  $-dv$  con  $(-dv/d\square)\mathbf{b} = -\square^*$ . El resultado de que ahora la *aceleración normal suplementaria*:

$$a_{\square}^* = B'B''/dt^2 = dsdv/dt = v\square^*$$

pasa a ser:

$$-a_{\square}^* = B'B''/dt^2 = ds(-dv/dt) = -v\square^*$$

y en expresión vectorial:

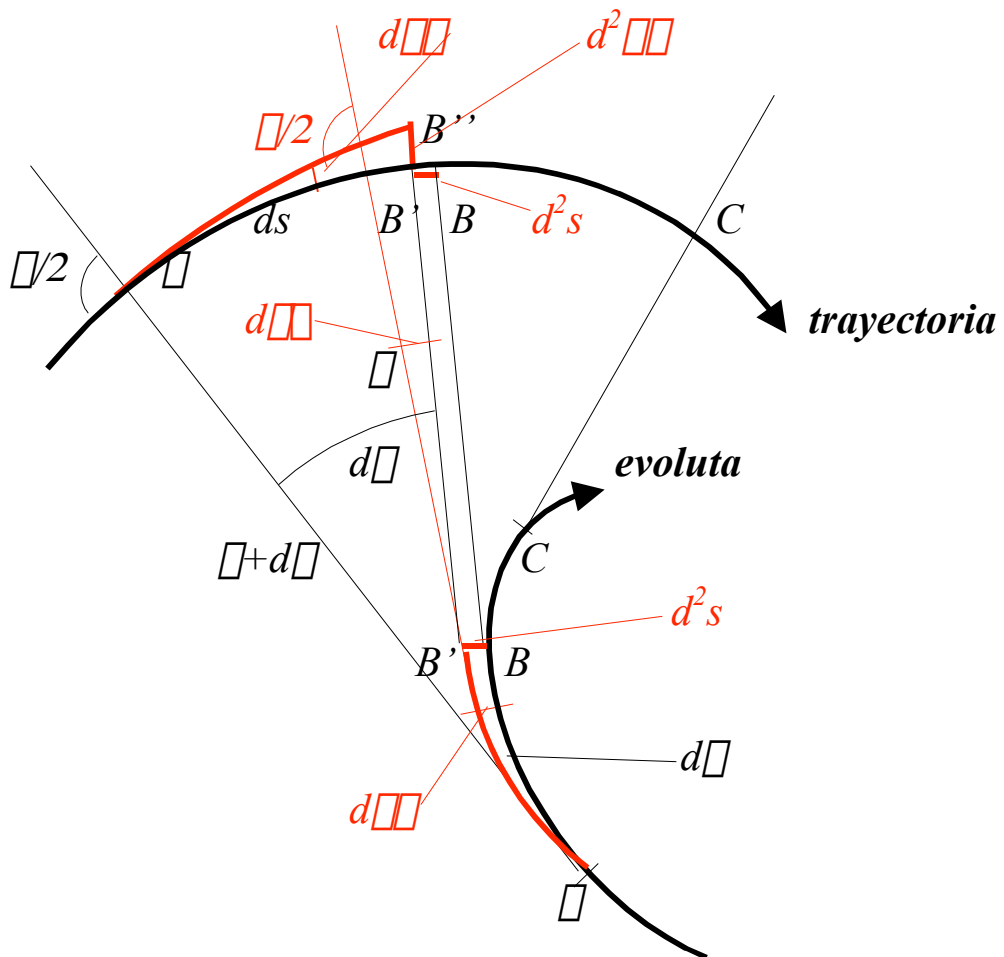
$$-\mathbf{a}_{\square}^* = -\mathbf{v} \square \square^*$$

*inversa* a la precedente al cambio de sentido del movimiento (ver expresiones (2) y (3) y Figs. 1, 2 y 1', 2' al final).

En consecuencia, si un punto material describe una determinada trayectoria y se *invierte el sentido de recorrido*, ésta resulta inalterada en el marco de la DC; es **reversible**. Sin embargo no sucede lo mismo en la ND,

pues la trayectoria de “vuelta” ya no coincidirá con la de “ida”; es *irreversible*.

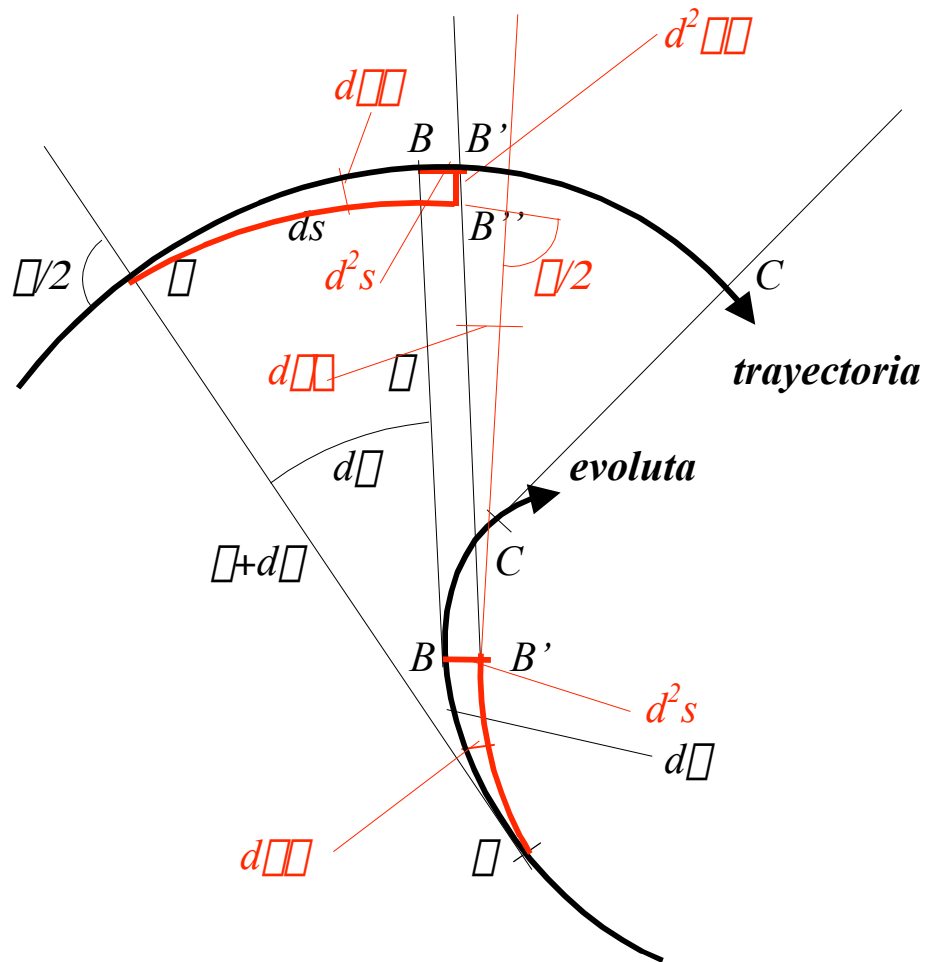
La *irrevesibilidad* en *Termodinámica*; el *CAOS*, descubierto en muchos fenómenos físicos; etc. es consecuencia de dicha *irreversibilidad*.



*Aceleración Normal Suplementaria* (cuando  $dv/dt > 0$ )

$$a_n^* = d^2\phi/dt^2$$

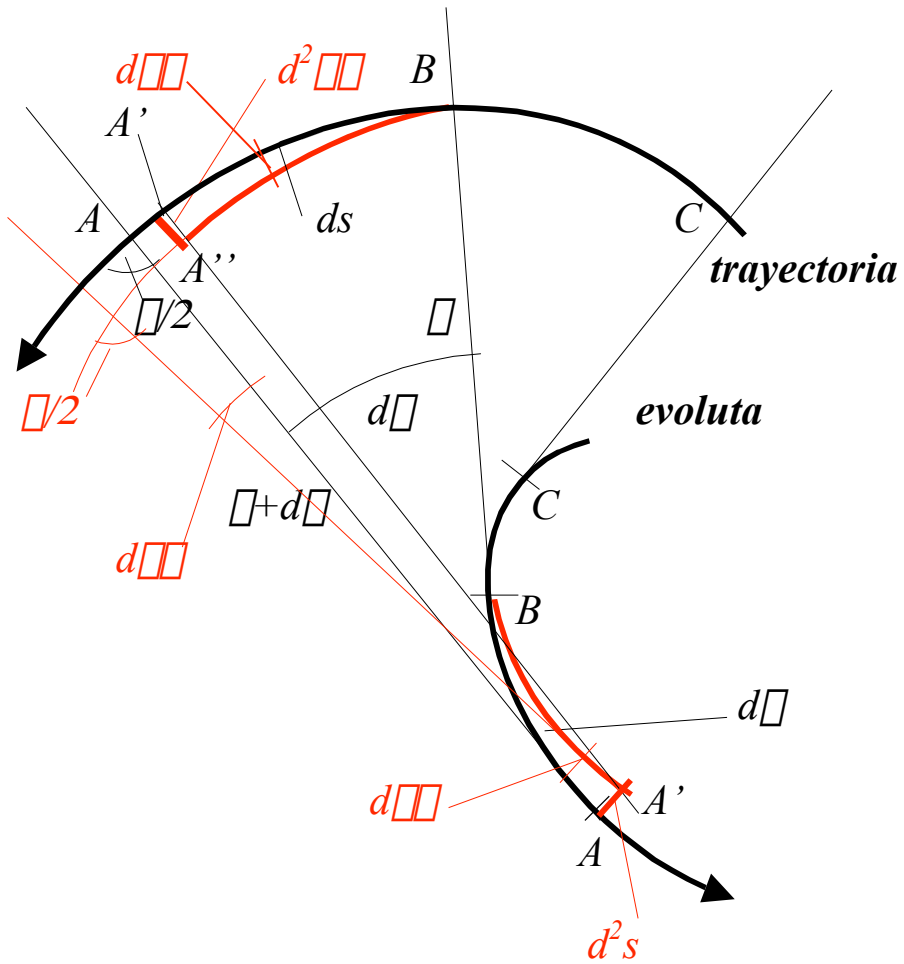
**FIG. 1**



**Aceleración Normal Suplementaria** (cuando  $dv/dt < 0$ )

$$a_n^* = d^2\phi/dt^2$$

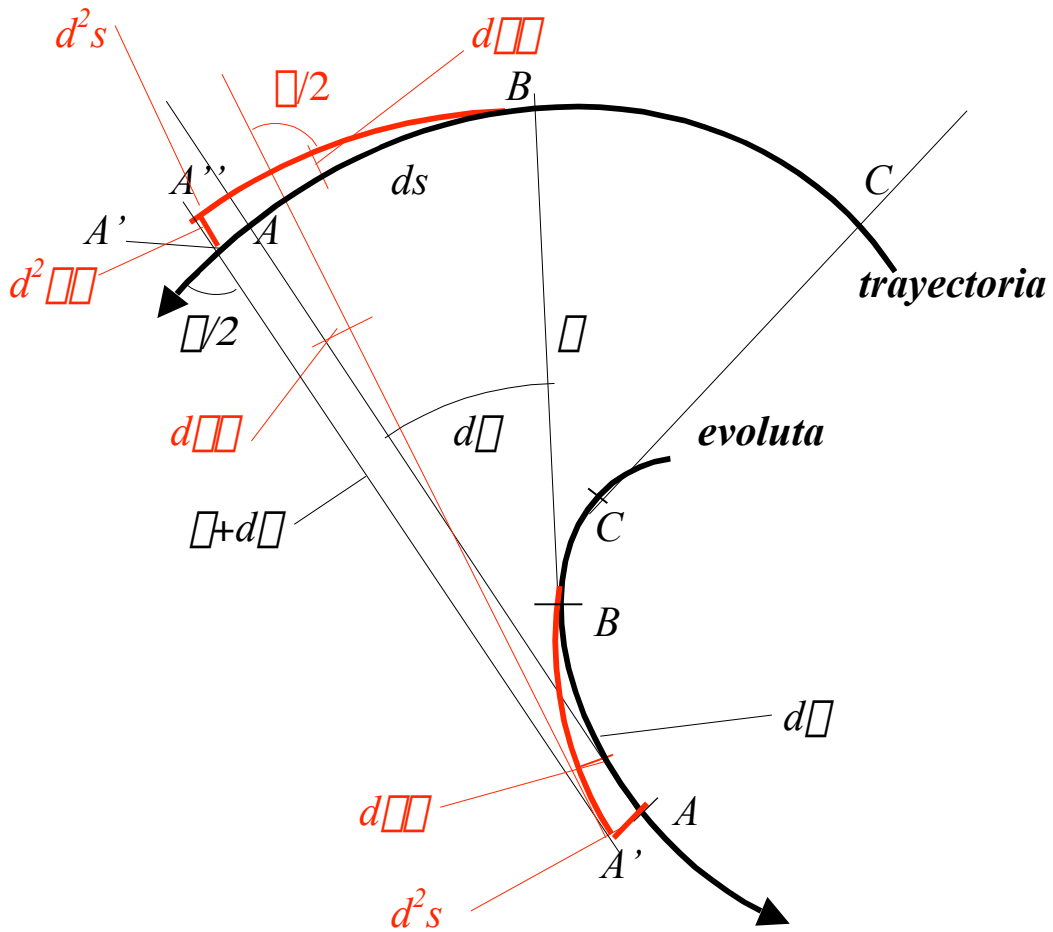
**FIG. 2**



***Aceleración Normal Suplementaria***  
*(en recorrido inverso, siendo ahora  $dv/dt > 0$ )*

$$a_n^* = d^2 \phi / dt^2$$

**FIG. 1'**



***Aceleración Normal Suplementaria***  
*(en recorrido inverso, siendo ahora  $dv/dt < 0$ )*

$$a_n^* = d^2\pi/dt^2$$

**FIG. 2'**





Juan RIUS – CAMPS,

Doctor Arquitecto,  
Profesor de la UNIVERSIDAD DE NAVARRA.  
Miembro de la REAL SOCIEDAD ESPAÑOLA DE FISICA.

Dirección:

Gran Via de Carlos III, 59, 2º, 4ª,  
08028, BARCELONA.

E-mail [jsriuscamps@coac.net](mailto:jsriuscamps@coac.net)

E-mail [john@irreversiblesystems.com](mailto:john@irreversiblesystems.com)

Página web: [irreversiblesystems.com](http://irreversiblesystems.com)

Tel : 93 - 330 10 69

(Revisado el 26 de Febrero de 2009)

