JOHN RIUS – CAMPS

THE FERMAT's PROBLEM

$Z^p = X^p + Y^p$

Proof of
3TH September 2013

(Revised 31 V 2014)

ORDIS EDITIONS
(English –Spanish)

ORDIS EDITIONS

GRAN VIA DE CARLES III, 59, 2º 4ª
08028 BARCELONA
3TH September 20013
(Revised 31TH V 2014)

THE FERMAT'S PROBLEM

1. This conjecture[1] asserts that the diophantine equation:

$$\boxed{z^p = x^p + y^p} \qquad (1)$$

only admits *integer* and *positive* solutions for $p < 3$, as already asserted Pierre Simon de FERMAT (1601 – 1665) in an annotation to the *Arithmetic* of DIOPHANTUS OF ALEXANDRIA (probably s. II D.C.). For $p = 2$ we have the famous "Pythagorean equation" that has infinite solutions, the most known is the "Egyptian triangle": $3^2 + 4^2 = 5^2$. EULER demonstrated the impossibility of (1) for $p = 3$ and $p = 4$; DIRICHLET for $p = 5$; LAMÉ for $p = 7$; LEGENDRE for $p = 14$; KUMMER studied it for several categories of numbers.

It is enough to study the equation (1) only for the *prime numbers* exponents, except 2, and also, in this case, it is necessary to prove the theorem for $p = 4$ (EULER). Always it is possible to consider *positive* the three numbers x, y, z, and furthermore, *prime to each other*. Therefore, only one of these three numbers may be *pair*.

2. Now we will study (1), in the hypotheses that the *exponent* is an *prime number:* $p = 2n+1$ and that (x, y, z) is a diophantine solution of (1). We will prove that this one is

[1] Already proved, following a different path, by the British mathematician Andrew WILES. This proof was published in *Annals of Mathematics*. May of 1995.

satisfied only when,

$$\boxed{z = x + y}$$

And from (1) it is also:

$$z \leq x + y \qquad z \geq x \qquad z \geq y$$

Consequently we can write

$$z = (x + y) - a \qquad \text{with} \qquad 0 \leq a \leq x + y \qquad (2)$$

$$x \leq a \qquad y \leq a$$

3. We can express (1) –in view of (2) – by means of the *binomial development:*

$$\boldsymbol{z^p = [(x+y) - a]^p = (x+y)^p - [^p{}_1]\,(x+y)^{p-1}a + [^p{}_2]\,(x+y)^{p-2}a^2 - \ldots}$$

$$\boldsymbol{\ldots + [^p{}_{p-1}](x+y)a^{p-1} - a^p} \qquad (3)$$

4. Now our study is focussed in the possibility of a *process* in order of having the *same degree* $\boldsymbol{p}$ for all the terms $(x + y)^i$ $(i = p,\ p\text{-}1\ ,\ p\text{-}2\ , \ldots\ 1)$ in (3) . We begin with the *genera*l *case* considering $\boldsymbol{z, x. y; a,}$ *real numbers;* solution *always possible* of (3); the exponent $\boldsymbol{p}$ is a *prime number*. For that aim, we depart from the ***second term*** in the second member of (3), that for this purpose must satisfy,

$$\boldsymbol{[^p{}_1]\,a = pa = k(x + y)} \qquad (4)$$

with $\qquad 0 \leq k \leq p$

Being $\boldsymbol{k}$ a *real number.*

Similarly, in he ***thirth term*** we write,

$$[^p{}_2]\,a^2 = h(x+y)^2 \tag{5}$$

In the ***fourth term*** we get,

$$[^p{}_3]\,a^3 = l(x+y)^3$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Finally we write,

$$[^p{}_{p-1}](a^{p-1} = r(x+y)^{p-1}$$

and,

$$a^p = s(x+y)^p$$

Introducing this numbers in (3), results,

$$z^p = [(x+y)-a]^p = (x+y)^p - k((x+y)^p + h(x+y)^p -$$

$$- l\,(x+y)^p + \dots\dots + r(x+y)^p - s(x+y)^p =$$

$$\boxed{z^p = (x+y)^p(1-k+h-l+\dots+r-s) = (x+y)^pM} \tag{6}$$

This result is *always possible* in the *field of real numbers.*

Now we will study (6) when, ***z, x. y; a,*** *are integer and positive numbers, (and* ***p*** *a prime number);* in an hypothetical diophantine solution of (1). For this aim, when in (4) is:

$$a = 0 \qquad k = 0 \qquad (x + y) \neq 0$$

it is immediate the **no trivial solution** of (1) :

$$\boxed{z = x + y} \tag{7}$$

And from,

$$k = p$$

then in (4) is, $a = (x + y)$

And in (2) we get, $\boxed{z = x = y = 0}$ (8)

Trivial solution of (1) .

However it is possible for k to assume other different values that can give us more integer solutions for (1) . For this purpose, we consider the ***third term*** in the *second member* of (3),

$$[{}^{p}{}_{2}]\,(x + y)^{p-3}a^2$$

and, for getting *degree* ***p ,*** it will be,

$$[{}^{p}{}_{2}]\,a^2 = [\,p(p-1)/2\,]\,a^2 = h(x + y)^2 \tag{9}$$

Being $\boldsymbol{h}$ a *rational number* ≥ 0 to be determined as in the former case.

But from the last one we can write

$$\boldsymbol{[{}^{p}{}_{2}] \;=\; p(p-1)/2 \;=\; h(x+y)^2/a^2} \qquad (10)$$

It is worth noting that, until here, our reasoning path will be fulfilled also when in (10) ***z, y, x; a,*** are *positive real numbers.* But, in the hypothesis that ***z, y, x; a,*** are *integer* and *positive numbers* ***(p = 2n+1*** is a *prime number)* the ***binomial coefficient*** $\boldsymbol{[{}^{p}{}_{2}]}$ in (10) ***cannot be an square number***[2]. (Consequently ***h*** *can not be an square number,* because, in that case, (10) becomes **impossible**).

But from (9) it is immediate,

$$p(p-1) \;=\; 2h(x+y)^2/a^2 \qquad (10)$$

and from (4) we get,

$$pa \;=\; k(x+y)$$

$$p^2a^2 \;=\; k^2(x+y)^2$$

$$(x+y)^2 \;=\; p^2a^2/k^2$$

consequently in (10) we have,

---

[2] J. REY PASTOR. *Elementos de Análisis Algebraico*. 12ª Ed. Madrid 1956. p. 131. The author's summary is: "*when* a >3, *between* a *y* 2a-2, *there is, at least, a prime number,* (TSCHEBISCHEFF). We omit the proof, because it is not an elemental one; but an interesting result is that the *factorial* n! (except 1!) *can not be an square number*.

$$p(p-1) \;=\; p^2-p \;=\; 2h(1/a^2)p^2a^2/k^2 \;=$$

$$=\; 2hp^2/k^2$$

$$p-1 \;=\; 2hp/k^2 \qquad \text{(integer > 0)} \qquad (11)$$

and beeing p *prime number*, it is necessary that,

$$2h \;=\; \text{multiple } k^2 \;=\; mk^2,$$

with

$$\boldsymbol{p-1 \;=\; mk^2p/k^2 \;=\; mp > p} \;\; \text{(integer >0)} \qquad (12)$$

which is ***imposible.*** Except when in (12) is

$$: \qquad \boldsymbol{p = 1} \qquad \boldsymbol{m = h = 0}$$

And we have the ***only diophantine solution of*** (1) ,

$$\boxed{\boldsymbol{z \;=\; x \;+\; y}} \qquad (7)$$

6. Finally, in the case of *even exponents* $p = 2n$, the only possibility is the *"Pythagorean equation"*:

$$\boxed{\boldsymbol{z^2 \;=\; x^2 \;+\; y^2}} \qquad (13)$$

However the proof is unnecessary for *even* exponents, because it is *implicit* in the precedent *uneven case,* that includes all *prime numbers* save the *integer 2* .

If our exposition is correct, the FERMAT's LAST THEOREM should be proved. The diophantine equation (1) has only the **no trivial solutions,** (7) for *uneven exponents,* and the "Pythagorean equation" (13) when the exponent is *even.* Also the *trivial result* (8).

The supposed proof given by FERMAT could be the present one.

EL PROBLEMA DE FERMAT

1. Esta conjetura[3] afirma que la *ecuación diofántica:*

$$\boxed{z^p = x^p + y^p} \qquad (1)$$

sólo admite soluciones *enteras* para $p < 3$, como ya afirmara Pierre Simon de FERMAT (1601 – 1665) en una anotación a la *Aritmética* de DIOFANTO DE ALEJANDRIA (probablemente s. II D.C.). Para $p = 2$ tenemos la famosa *"ecuación pitagórica"* que tiene infinitas soluciones, la más conocida es el *"triángulo egipcio":* $3^2 + 4^2 = 5^2$. EULER demostró la imposibilidad de (1) para $p = 3$ y $p = 4$; DIRICHLET para $p = 5$; LAMÉ para $p = 7$; LEGENDRE para $p = 14$; KUMMER la estudió para diversas categorías de valores.

Es suficiente estudiar la ecuación (1) solamente para los exponentes *primos*, excepto el 2 , y también es preciso probar el teorema para $p = 4$ (EULER). Siempre es posible considerar los tres *números x , y , z , enteros y positivos,* y además *primos entre sí*. En consecuencia, sólo uno de estos tres números puede ser *par*. En lo que sigue, se considera p *primo.*

2. Ahora estudiaremos (1), en las hipótesis de que el exponente sea *primo:* $p = 2n+1$ y que (x, y, z) es solución diofántica de (1) . Probaremos que ésta se satisface solamente cuando:

$$\boxed{z = x + y}$$

[3] Ya probada por otro camino por el matemático británico Andrew WILES; publicada la demostración en *Annals of Mathematics*. Mayo de 1995.

De (1) es inmediato que:

$$z \leq x + y \qquad z \geq x \qquad z \geq y$$

En consecuencia podemos escribir:

$$z = (x + y) - a \quad \text{siendo} \quad 0 \leq a \leq x + y \tag{2}$$

$$x \leq a \qquad y \leq a$$

3. Podemos también expresar (1) , a la vista (2) , mediante el *desarrollo binómico:*

$$\boldsymbol{z^p = [(x + y) - a]^p = (x + y)^p - [^p{}_1]\,(x + y)^{p-1}a + [^p{}_2]\,(x + y)^{p-2}a^2 -}$$

$$\boldsymbol{\ldots + [^p{}_{p-1}](x + y)a^{p-1} - a^p} \tag{3}$$

4. El presente estudio se centra en la posibilidad de lograr un *proceso* para que todos los términos del *segundo miembro* de (3) en $(x + y)^i$ $(i = p,\ p\text{-}1\ ,\ p\text{-}2\ ,\ \ldots\ 1)$, sean del *mismo grado* $\boldsymbol{p}$. A este fin consideraremos, en primer lugar, el *caso general* en el que ***z, x. y; a,*** *son números rales* y solución *–siempre posible–* de (3). Para mayor sencillez es suficiente que ***p*** sea *primo.* Partimos del ***segundo término*** en el *segundo miembro* de (3), que deberá cumplir:

$$\boldsymbol{[^p{}_1]\,a = pa = k(x + y)} \tag{4}$$

con $0 \leq k \leq p$

siendo ***k*** un *número real.*

Análogamente, en el ***tercer término*** podemos escribir:

$$\left[{}^{p}{}_{2}\right] a^{2} = h(x+y)^{2} \tag{5}$$

En el ***cuarto término*** tendremos:

$$\left[{}^{p}{}_{3}\right] a^{3} = l(x+y)^{3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Y Finalmente***,*** *los* ***dos últimos términos:***

$$\left[{}^{p}{}_{p-1}\right] a^{p-1} = r(x+y)^{p-1}$$

y

$$a^{p} = s(x+y)^{p}$$

Que introducidos en (3), resulta:

$$z^{p} = [(x+y)-a]^{p} = (x+y)^{p} - k(x+y)^{p} + h(x+y)^{p} -$$

$$- l(x+y)^{p} + \ldots + r(x+y)^{p} - s(x+y)^{p} =$$

$$\boxed{z^{p} = (x+y)^{p}(1-k+h-l+\ldots+r-s) = (x+y)^{p}M} \tag{6}$$

Siempre posible en el campo de los *números reales.*

Ahora seguirá el estudio de (6) cuando ***z, x. y; a,*** *sean números enteros y positivos, (y* ***p*** *primo);* en la hipótesis de que sean solución de (1). De ahí se sigue que cuando en (4) es:

$$a = 0 \qquad k = 0 \qquad (x+y) \neq 0$$

es inmediata la **solución no trivial** de (1) :

$$\boxed{z = x + y} \qquad (7)$$

Y a partir de:

$$\boldsymbol{k = p}$$

en (4) es $\boldsymbol{a = (x + y)}$

y en la (2) es,

$$\boxed{z = x = y = 0} \qquad (8)$$

Solución trivial de (1) .

Sin embargo, en (4) , $\boldsymbol{k}$ puede tomar *otros valores, enteros o fraccionarios,* que podrían dar más soluciones de (1) . Para estudiar esta posibilidad, consideraremos ahora el ***siguiente término*** $\boldsymbol{[{}^{p}{}_{2}](x + y)^{p-2}a^{2}}$ de (3) :

Y para conseguir, asimismo, *grado* $\boldsymbol{p}$ *,* deberá ser:

$$[{}^{p}{}_{2}]\,a^2 = [\,p(p-1)/2\,]\,a^2 = h(x + y)^2$$

en que $\boldsymbol{h}$ es un *número racional* ≥ 0 *,* a determinar como en el precedente caso. Ahora, a partir de la última resulta:

$$[{}^{p}{}_{2}]/h = (p!/(p\text{-}2)!2!)/h = (x + y)^2/a^2 \qquad (9)$$

Es de notar que, hasta aquí, el razonamiento seguido se satisface asimismo cuando en (9) $\boldsymbol{z, y, x; a,}$ sean *números reales y positivos.* Pero en la hipótesis de que $\boldsymbol{z, y, x; a,}$ sean *enteros* *positivos (**p** es primo),* el ***coeficiente binómico*** *$[^p{}_2]$* en (9) ***no puede ser cuadrado perfecto[4].*** (Por consiguiente ***h tampoco puede ser un cuadrado perfecto***, pues, en este caso, la (9) sería ***imposible)***.

Pero de la (9) es inmediato:

$$p(p-1) = 2h(x+y)^2/a^2 \qquad (10)$$

y por la (4) es,

$$pa = k(x+y)$$

$$p^2a^2 = k^2(x+y)^2$$

$$(x+y)^2 = p^2a^2/k^2$$

de donde en (10),

$$p(p-1) = p^2-p = 2h(1/a^2)p^2a^2/k^2 =$$

$$= 2hp^2/k^2$$

$$p-1 = 2hp/k^2 \qquad (entero > 0) \qquad (11)$$

en la que, siendo *p primo*, deberá ser:

$$2h = múltiplo\ k^2 = mk^2$$

$$\mathbf{p-1 = mk^2p/k^2 = mp > p} \quad (entero > 0) \qquad (12)$$

que es ***imposible,*** excepto cuando en (12) es:

---

[4] J. REY PASTOR. *Elementos de Análisis Algebraico*. 12ª Ed. Madrid 1956. p. 131. The author's summary is: "*Si es* a >3, *entre* a *y* 2a-2, *hay por lo menos un número primo*. (TSCHEBISCHEFF). Este teorema, uno de los más importantes de la teoría, no ha podido demostrarse elementalmente. Omitiendo, pues, la demostración, que exige recursos de Análisis superior, haremos una aplicación interesante: *Ninguna factorial* n! (excepto 1!) *es un cuadrado perfecto*".

$$\boldsymbol{p = 1 \qquad m = h = 0}$$

que nos conduce de inmediato a la solución de (1) ,

$$\boxed{\boldsymbol{z = x + y}} \qquad (7)$$

En resumen, para exponentes $\boldsymbol{p > 1}$, **NO EXISTE SOLUCIÓN DIOFÁNTICA** de (1) .

5. Finalmente sólo añadir que cundo el exponente es *par*, $p = 2n$, sólo existen las infinitas soluciones enteras de la *"ecuación pitagórica":*

$$\boxed{\boldsymbol{z^2 = x^2 + y^2}} \qquad (13)$$

Sin embargo la *demostración* no es necesaria, pues está implícita en la anterior para exponentes *primos*, excepto el *2* . Como es sabido, basta demostrar (1) para exponentes *primos.* En este caso es preciso demostrar, además, su *imposibilidad* para el exponente *4* , dada ya por EULER.

Si nuestra exposición es correcta quedaría probado el "ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT". Las únicas soluciones, no triviales, de la ecuación diofántica (1) son: la (7) cuando el exponente es *primo impar,* y la *"ecuación pitagórica"* (13) cuando el exponente es *par.* Asimismo la *solución trivial* (8). La pretendida prueba dada por FERMAT podría ser la presente.

JOHN RIUS – CAMPS

Doctor Architect
Professor of the UNIVERSIDAD DE NAVARRA.
Member of the REAL SOCIEDAD ESPAÑOLA DE FÍSICA.

Address:

Gran Vía de Carlos III, 59, 2º, 4ª
08028, Barcelona.

T. 933 301 069
T. mobile 659 275 089

E-mail jsriuscamps@coac.net
E-mail john@irreversiblesystems.com

Web site: irreversiblesystems.com

Barcelona, 3TH September 2013
(revised 31 V 2014)